Colle du 16 décembre : Révision

12.1 Sujet A

Question de cours A1 : Théorème du point fixe.

Question de cours A2 : Théorème d'intégration des séries de fonctions.

Exercice A1 : Selon que $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, dire si les affirmations suivantes sont vraies :
1. S'il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ vérifiant $A^2 + 2A + 5 = 0$, alors n est pair.
2. Si n est pair, alors il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ vérifiant $A^2 + 2A + 5 = 0$.

Exercice A2 : 1. Rappeler la valeur de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.
2. On pose $R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Quelle est la nature des séries $\sum R_n$ et $\sum R_n^2$?
3. Soit $u_n = \ln(\exp(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}) - 1)$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

12.2 Sujet B

Question de cours B1 : Théorème de dérivation des suites de fonctions.

Question de cours B2 : Définition d'un espace vectoriel.

Exercice B1 : Considérons la matrice :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. La matrice C est-elle diagonalisable ? Quelles sont ses valeurs propres ? Quels sont ses espaces propres ? Donner une interprétation géométrique de ces résultats.
2. Utiliser la question précédente pour donner une base de l'espace des solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & u_n - v_n - w_n \\ v_{n+1} & = & -u_n + v_n - w_n \\ w_{n+1} & = & u_n + v_n + 3w_n \end{array} \right.$$

Soient maintenant $A \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{2,3}(\mathbb{R})$ des matrices telles que $AB = C$.
3. Calculer les rangs de A et B. Que dire des dimensions des noyaux de A et B ?
4. Montrer que $BA = I_2$.

Exercice B2 : Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

12.3 Sujet C

Question de cours C1 : Formule de Taylor avec reste intégral.

Question de cours C2 : Lemme des noyaux.

Exercice C1 : Les anneaux $\mathbb{R}[X,Y]$, $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}[X]$ sont-ils principaux ?

Exercice C2 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$, on considère la norme $N(P) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}$. On ne demande pas de prouver que N est une norme.
1. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k^2}$. La suite (P_n) est-elle de Cauchy ? Est-elle convergente ?
2. La boule unité de E est-elle compacte ?
3. La dérivation dans E est-elle continue ?
4. Montrer que l'application $P \mapsto (X+1)P$ est continue et calculer sa norme.